Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2
Übungsblatt 9

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **05. Juni 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1.

(a) Seien G ein Gruppe und K ein Körper. Zeigen Sie: G ist abelsch genau dann, wenn KG kommutativ ist.

(b) Seien G und H endliche abelsche Gruppen. Beweisen Sie, dass $|G| = |H|$ gilt genau dann, wenn $\mathbb{C}G \cong_{\mathrm{Alg}} \mathbb{C}H$ gilt.

Definition. Seien G und H endliche Gruppen. Die Kompositionsreihen

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G,$$
$$1 = H_0 < H_1 < \cdots < H_m = H,$$

heißen *äquivalent* falls $n = m$ gilt und es ein $\sigma \in S_n$ gibt, so dass für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$G_i/G_{i-1} \cong H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)-1}.$$

Aufgabe 2.

(a) Seien G und H endliche Gruppen. Beweisen Sie, wenn $G \cong H$, dann sind je zwei Kompositionsreihen von G und H äquivalent.

(b) Seien

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2),$$
$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3).$$

Zeigen Sie, dass $G \ncong H$ gilt, aber dann G und H äquivalente Kompositionsreihen haben.

Aufgabe 3. Seien G eine endliche Gruppe und K ein Körper. Seien V und W zwei KG-Moduln mit entsprechenden Darstellungen ρ_1 bzw. ρ_2. Beweisen Sie: $\rho_1 \sim \rho_2$ genau dann, wenn $V \cong_{KG} W$.

<u>Zur Erinnerung</u>: Die Symmetriegruppe des regelmässigen n-Ecks in der Ebene ist mit D_{2n} bezeichnet. Die Gruppe D_{2n} wird durch eine Drehung r und eine Reflexion s erzeugt derart, dass $r^n = s^2 = 1$ und $srs = r^{-1}$. Wir schreiben typischerweise

$$D_{2n} = \left\langle r, s \;\middle|\; r^n = s^2 = 1,\ srs = r^{-1} \right\rangle.$$

Die Gruppe D_{2n} heißt die Diedergruppe der Ordnung $2n$.

Aufgabe 4. Seien $V = \mathbb{C}^2$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ ein fünfte Einheitwurzel (d.h. $\zeta^5 = 1$). Dann induziert das Folgende eine Darstellung $\rho : D_{10} \to \mathrm{GL}(V)$,

$$r \mapsto \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \qquad s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Beweisen Sie, wenn $\zeta \neq \zeta^{-1}$ ist, dann ist V ein einfacher $\mathbb{C}D_{10}$-Modul.
Hinweis: Betrachten Sie gemeinsame Eigenräume.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von D_{10} und ihre Grade.