

Algebra 2
Übungsblatt 8

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **29. May 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—
Aufgabe 1. Sei $R = \mathbb{Q}[x, y]$.

- (a) Geben Sie einen nicht-artinschen Unterring von R an.
- (b) Geben Sie einen artinschen Unterring von R an.

Aufgabe 2. Sei M ein halbeinfacher R -Modul. Zeigen Sie, dass M noethersch ist genau dann, wenn M artinsch ist.

Hinweis: In beiden Fällen kann man zeigen, dass M eine direkte Summe von endlich viele einfachen Moduln ist.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie das Jacobson Radikal der folgenden Ringe.

- (a) $R_1 = \mathbb{Z}/(2048)$.
- (b) $R_2 = \mathbb{Z}/(72)$.
- (c) $R_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$.

Aufgabe 4. Seien I ein Ideal des Ringes R , das im Jacobson Radikal von R enthalten ist, und M ein endlich erzeugter R -Modul.

- (a) Zeigen Sie, wenn $a \in I$, dann ist $1 - a$ eine Einheit von R .
Hinweis: Benutzen Sie Lemma 3.4 aus der Vorlesung.
- (b) Beweisen Sie, wenn $IM = M$, dann ist $M = 0$.