Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2

Übungsblatt 7

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **22. May 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie die maximale Ideale von $\mathbb{Q}[x]$ und, als Konsequenz, bestimmen Sie die Gestalten der einfachen $\mathbb{Q}[x]$-Moduln.

(b) Ist $\mathbb{Q}[x]$ ein halbeinfacher Ring? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. Sei $M \neq 0$ ein endlich erzeugter halbeinfacher R-Modul. Beweisen Sie, dass ein $t \in \mathbb{Z}$ und $M_1, \ldots, M_t \leq_R M$ einfache Untermoduln existieren derart, dass $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$.
Hinweis: Beweis durch Induktion nach der minimalen Mächtigkeit eines EZSs von M. Beim Induktionsanfang (M zyklisch), betrachten Sie den Beweis von Satz 3.13.

Aufgabe 3. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, dass heißt $\overline{K} = K$, und nehmen Sie an, dass R eine K-algebra ist. Sei M ein einfacher R-Modul.

(a) Beweisen Sie, dass M ein K-Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\{k \cdot \mathrm{id}_M \mid k \in K\} \leq_K \mathrm{End}_R(M) \leq_K \mathrm{End}_K(M)$.

(c) Nehmen Sie an, dass M ein endlich Dimensionaler K-Vektorraum ist. Beweisen Sie, dass $\mathrm{End}_R(M) \cong_K K$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie einen Eigenraum.

Aufgabe 4. Seien $R = \mathbb{C}[x, y]$ und

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}), \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}).$$

Dann ist $V = \mathbb{C}^3$ ein R-Modul durch

$$x \cdot v = \left(Xv^{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{t}}, \qquad y \cdot v = \left(Yv^{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{t}}.$$

(a) Beweisen Sie, dass R ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension 6 ist.

(b) Ist V ein zyklischer R-Modul? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass V ein halbeinfacher R-Modul ist.