Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2

Übungsblatt 6

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **15. May 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1. Sei M ein R-Modul mit EZS X und sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung. Dann ist $\{1 \otimes x\}_{x \in X}$ ein EZS von $S \otimes_R M$ und, wenn X eine R-Basis von M ist, ist $\{1 \otimes x\}_{x \in X}$ eine S-Basis von $S \otimes_R M$.

Aufgabe 2. Sei U ein Untermonoid des Ringes R und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Beweisen Sie, dass $U^{-1}M = 0$ genau dann, wenn ein $u \in U$ existiert derart, dass $uM = 0$.

Zur Erinnerung: Ein R-Modul M heißt *einfach* falls er genau zwei Untermoduln enthält.

Aufgabe 3. Sei M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt.

(a) Wir nehmen an, dass M ein einfacher Modul ist. Für $x \in M$ gilt: entweder $M = Rx$ oder $x = 0$.

(b) Der Modul M ist einfach genau dann, wenn ein $N \leq_R R$ maximal existiert derart, dass $M \cong_R R/N$.

(c) Wir nehmen an, dass R ein Schiefkörper ist. Der Modul M ist einfact genau dann, wenn $M \cong_R R$.

Zur Erinnerung: Ein R-Modul M heißt *halbeinfach*, falls für jeder $N \leq_R M$ ein $C \leq_R M$ existiert derart, dass $M = N \oplus C$.

Aufgabe 4. Seien

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \qquad\qquad S = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass S ein halbeinfacher S-Modul ist.

(b) Zeigen Sie, dass U kein halbeinfacher U-Modul ist.