Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2
Übungsblatt 5

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **8. May 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1. Sei M ein R-Modul. Beweisen Sie, dass $R \otimes_R M \cong_R M$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt.

(a) Es gilt $\mathbb{Z}/(3) \otimes_{\mathbb{Z}} 15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(3)$.
(b) Wenn A ein $\mathbb{Z}$-Torsionsmodul ist, gilt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A = 0$.
(c) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $d = \mathrm{ggT}\{a, b\}$. Dann gilt $\mathbb{Z}/(a) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(b) \cong \mathbb{Z}/(d)$.

Zur Erinnerung:
Tensorprodukte müssen keS nicht einhalten. Aus der Vorlesung wissen wir, dass wenn

$$(*) \qquad 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

ein keS von R-Moduln und N ein R-Modul sind, dann ist die Sequenz

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}} M'' \otimes_R N \to 0$$

exakt; im Allgemeinen ist die Abbildung $f \otimes \mathrm{id}$ nicht injektiv. Der Modul N heißt *flach*, falls für jede keS von R-Moduln wie $(*)$, die Sequenz

$$0 \to M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}} M'' \otimes_R N \to 0$$

exakt ist. Zum Beispiel, $\mathbb{Q}$ ist ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul, aber $\mathbb{Z}/(n)$ ist kein flacher $\mathbb{Z}$-Modul.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass die folgende $\mathbb{Z}$-Moduln nicht isomorph sind:

$$M = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/(2^n) \right), \qquad N = \prod_{n \geq 1} \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(2^n) \right).$$

Sie dürfen benutzen, dass $\mathbb{Q}$ ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul ist.

Aufgabe 4. Ein Element $x \in M \otimes_R M'$ ist ein *reiner Tensor* (engl. pure tensor), wenn es $m \in M$ und $m' \in M'$ gibt, so dass $x = m \otimes m'$.

(a) Seien R ein kommutativer Ring und I, J Ideale von R. Zeigen Sie: wenn $x \in (R/I) \otimes_R (R/J)$, gibt es ein $r \in R$ derart, dass $x = (1+I) \otimes (r + J)$. Schließen Sie aus, dass jeder Element von $(R/I) \otimes_R (R/J)$ ein reiner Tensor ist.
(b) Seien $R = \mathbb{Z}[x]$ and $I = (2, x)_R$. Beweisen Sie, dass $2 \otimes 2 + x \otimes x \in I \otimes_R I$ kein reiner Tensor ist. Das heißt, es gibt keine $a, b \in I$ derart, dass $a \otimes b = 2 \otimes 2 + x \otimes x$.
Hinweis: Multiplikation $R \times R \to R$ ist R-bilinear und so ist ihre Beschraenkung $I \times I \to I$.