Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2
Übungsblatt 4

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, **2. May 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1. Die Untergruppe

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} : \begin{array}{c} a, b \in \mathbb{F}_7 \\ c \in \mathbb{F}_7^\times \end{array} \right\}$$

von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_7)$ ist eine abelsche Gruppe. Bestimmen Sie die Invariantenteiler $(a_1) \supset (a_2) \supset \cdots \supset (a_t)$ von A als $\mathbb{Z}$-Modul wie im Satz 1.48 aus der Vorlesung, sodass

$$A \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(a_t).$$

Aufgabe 2. Seien M ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $t \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(M)$ sodass M eine natürliche Struktur als $\mathbb{Q}[t]$-Modul hat. Wenn das charakteristische Polynom von t gleich $x^3(x^2+1)(x^2-2)^2$ ist, wie viele unterschiedliche (bis auf Isomorphie) R-Modulstrukturen gibt es auf M?

Aufgabe 3. Zur Erinnerung: nach Lineare Algebra 1 sind zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$, über ein Körper K konjugiert genau dann, wenn A und B die gleiche Frobeniusche Normalform besitzen.

(a) Zeigen Sie: wenn $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$, dann ist dass das charakteristische Polynom von A ein Polynom in $\mathbb{F}_2[x] \setminus (x)$.

(b) Geben Sie ein Vertreter von jeder Konjugiertenklassen von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ an.

Aufgabe 4. Seien $R = \mathbb{Z}[i]$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, und $M = \mathrm{Mat}_n(R)$: dann ist M ein R-Modul durch normale Skalarmultiplikation. Beweisen Sie, dass die Spurfunktion $b : M \times M \to R$ die durch $(A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(A \cdot B)$ definiert ist, R-bilinear ist.
Sie müssen nicht beweisen, dass die Spurfunktion additiv ist (Sie haben es schon in der LA2 gemacht).