Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2
Übungsblatt 3

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **24. April 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1. Sie wissen aus dem Kurs Algebra 1, dass das Ideal $(2, X)_{\mathbb{Z}[x]}$ von $\mathbb{Z}[x]$ kein Hauptideal ist und somit ist $\mathbb{Z}[x]$ kein Hauptidealring. Antworten Sie: ist $(2, x)_R$ ein Hauptideal in $R = \mathbb{Q}[x]$?

Aufgabe 2.

(1) Ziegen Sie, dass $(3) = (18) + (75)$ als Ideale des Ringes $\mathbb{Z}$.
(2) Seien R ein HIR und $a, b, d \in R$. Beweisen Sie, dass $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ ist genau dann, wenn $(d) = (a) + (b)$ gilt.

Aufgabe 3. Sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a \in \mathbb{Z}^\times \\ b \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\}.$$

(1) Zeigen Sie, dass M eine abelsche Gruppe ist.
(2) Geben Sie ein $\mathbb{Z}$-Modulstruktur von M an.
(3) Schreiben Sie M als direkte Summe von einem freien Modul und einem Torsionsmodul (wie im Satz 1.45).

Aufgabe 4. Seien R ein (kommutativer) Integritätsbereich und M ein R-Torsionsmodul, der endlich erzeugt ist. Beweisen Sie, dass ein $a \in R \setminus \{0\}$ existiert derart, dass $aM = 0$.

Z.K. Der $\mathbb{Z}$-Torsionmodul $M = \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{Z}/(2^i)$ besitzt kein endliches EZS und es gibt kein Element $a \in \mathbb{Z}$ derart, dass $aM = 0$.