Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2
Übungsblatt 2

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **17. April 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1.

(1) Ziegen Sie, dass $\mathbb{Z}$ ein torsionsfreier $\mathbb{Z}$-Modul ist.
(2) Ziegen Sie, dass $\mathbb{Q}$ ein torsionsfreier $\mathbb{Z}$-Modul ist.
(3) Bestimmen Sie die Torsionselemente von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

Aufgabe 2. Sei M ein noetherscher R-Modul. Beweisen Sie, dass wenn $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ surjektiv ist, so ist φ ein R-Modulisomorphismus.
<u>Hinweise:</u>

Schritt 1: Es gibt $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ derart, dass $\ker(\varphi^n) = \ker(\varphi^{n+1})$.
Schritt 2: Mit n als in Schritt 1, gilt $\ker(\varphi^n) \cap \mathrm{im}(\varphi^n) = \{0\}$.
Schritt 3: Schließen Sie aus, dass φ ein R-Modulisomorphismus ist.

Aufgabe 3. Sei $R = \mathbb{Q}[x, y]$, der Kommutativer Ring von Polynomen in den variablen x und y und mit rationalen Koeffizienten.

(1) Geben Sie einen R-Untermodul von R an, dass nicht frei ist.
(2) Sei I das Ideal

$$I = \left(x^p - \binom{p+1}{2} y : p \text{ Primzahl} \right)_R .$$

Ist I endlich erzeugt als R-Untermodul?

Aufgabe 4. Seien N ein R-Modul und

$$(*) \qquad 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

eine keS von R-Moduln. Definieren Sie $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen $f' : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M', N)$ und $g' : \mathrm{Hom}_R(M'', N) \to \mathrm{Hom}_R(M, N)$ durch

$$\varphi \mapsto f'(\varphi) = \varphi \circ f, \qquad \varphi \mapsto g'(\varphi) = \varphi \circ g.$$

(1) Beweisen Sie, dass

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{g'} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{f'} \mathrm{Hom}_R(M', N)$$

exakt ist. Sie dürfen annehmen, dass $\ker(f') \subseteq \mathrm{im}(g')$ gilt.
(2) Zeigen Sie: wenn $(*)$ spaltet, dann ist

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{g'} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{f'} \mathrm{Hom}_R(M', N) \to 0$$

exakt.