Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2
Übungsblatt 14

Jede Aufgabe ist **0 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1. Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $\mathrm{T}_n(K) \leq \mathrm{GL}_n(K)$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in K$, sei $E_{ij}(\lambda) = (a_{k\ell})$, mit

$$a_{k\ell} = \begin{cases} 1 & k = \ell, \\ \lambda & i = k, j = \ell, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem für $1 \leq k \leq n$ und $\mu \in K^\times$, sei $D_k(\mu) = (b_{ij})$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \neq k, \\ \mu & i = j = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Setzen Sie

$$\mathcal{E} = \{E_{ij}(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(K) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ \lambda \in K\},$$
$$\mathcal{D} = \left\{D_k(\mu) \in \mathrm{GL}_n(K) \;\middle|\; 1 \leq k \leq n,\ \mu \in K^\times\right\}.$$

Beweisen Sie: die Menge $\mathcal{E} \cup \mathcal{D}$ erzeugt $\mathrm{T}_n(K)$.

(b) Zeigen Sie: für $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ wird $\mathrm{T}_n(K)^{(m+2)}$ von

$$\mathcal{E}^{(m)} = \{E_{ij}(\lambda) \in \mathcal{E} \mid i + 2^m \leq j\}$$

erzeugt.

(c) Schließen Sie, dass $\mathrm{T}_n(K)$ auflösbar ist.

Aufgabe 2. Sei G eine endliche Gruppe.

(a) Seien H und N auflösbare Untergruppen von G, mit N normal. Beweisen Sie, dass HN auflösbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass es einen **eindeutigen** maximalen auflösbaren Normalteiler $\mathrm{Rad}(G)$ von G gibt. Die Untergruppe $\mathrm{Rad}(G)$ heißt das auflösbare Radikal von G.

(c) Beweisen Sie, die Quotientengruppe $G/\mathrm{Rad}(G)$ besitzt keinen nichttrivialen auflösbaren Normalteil.

Zur Erinnerung: Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Seien $\sigma \in \mathrm{A}_n$ und $\mathcal{C}$ die Konjugiertenklasse von σ in S_n. Es gibt $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_r$ Konjugiertenklassen in A_n derart, dass

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{C}_i$$

gilt. Dann ist $r \leq 2$ und genau eine der folgenden Aussagen gilt:

- $r = 1$, oder
- $r = 2$ und $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_2|$.

Außerdem $r = 2$ genau dann, wenn für die eindeutige Zerlegung von σ in disjunkte Zykeln gilt, dass alle Zykeln ungerade sind und unterschiedliche Länge haben.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Anzahl Konjugiertenklassen von S_5 gleich 7 ist, aber dass sie für A_5 gleich 5 ist.

Aufgabe 4. Seien $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ und $\overline{\varphi} = (1 - \sqrt{5})/2$. Füllen Sie die Charaktertafel von A_5 mit ganzen Zahlen aus. Die erste Spalte ist in aufsteigender Reihnfolge.

	1	(1 2 3)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3 5 4)	(1 2)(3 4)
χ_1					
χ_2			φ	$\overline{\varphi}$	
χ_3			$\overline{\varphi}$	φ	
χ_4					
χ_5		-1			1

Aufgabe 5. Sei G eine einfache endliche Gruppe und sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Beweisen Sie, durch die folgende Schritte, dass $\chi(1) \neq 2$ gilt.

Schritt 0: Beweisen Sie, dass nicht abelsche endliche einfache Gruppen genau eine lineare Darstellung haben. OBdA nehmen Sie an, dass G nicht abelsch ist.

Schritt 1: Durch Widerspruch, sei $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ eine treue 2-dimensionale irreduzible Darstellung. Zeigen Sie, dass

$$g \mapsto \det(\rho(g))$$

eine lineare Darstellung ist.

Schritt 2: Benutzen Sie Satz 6.19 und ÜB-10 Aufgabe 1, um zu zeigen, dass es ein $g \in G$ der Ordnung 2 gibt derart, dass

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Schritt 3: Schließen Sie, dass $g \in \mathrm{Z}(G)$.