Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2

Übungsblatt 13

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **3. Juli 2019**, im Postfach Ihres Tutors.
Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1.

(a) Sei G eine endliche Gruppe. Beweisen Sie, dass die Anzahl der inäquivalenten linearen Darstellungen von G über $\mathbb{C}$ gleich die Ordnung der Abelianisierung G^{ab} ist.

(b) Schließen Sie, dass eine endliche einfache Gruppe entweder 1 oder p lineare Darstellungen besitzt, wobei p eine Primzahl bezeichnet.

Aufgabe 2. Seien $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $G = D_{2n}$, die Diedergruppe der Ordnung $2n$ mit Präsentation:

$$D_{2n} = \left\langle r, s \;\middle|\; r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1} \right\rangle .$$

(a) Zeigen Sie, dass als Gruppen

$$G^{\mathrm{ab}} \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{falls } 2 \nmid n, \\ \mathbb{F}_2^2 & \text{falls } 2 \mid n. \end{cases}$$

(b) Beweisen Sie:

$$\mathrm{Z}(G) = \begin{cases} G & \text{falls } n \in \{1,2\}, \\ \{1\} & \text{falls } n > 2 \text{ und } 2 \nmid n, \\ \left\langle r^{n/2} \right\rangle & \text{falls } n > 2 \text{ und } 2 \mid n. \end{cases}$$

Zur Erinnerung: Seien $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $\chi_1, \dots, \chi_n$ die irreduzible Charaktere von $\mathbb{Z}/(n)$ über $\mathbb{C}$. Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Dann gilt, bis auf Permutation der i's, dass für jede $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}/(n)$,

$$\chi_i(k) = \omega^{ki}$$

ist.

Aufgabe 3. Seien $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ **ungerade** und $G = D_{2n}$ mit Präsentation:

$$D_{2n} = \left\langle r, s \;\middle|\; r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1} \right\rangle .$$

Setze $R = \langle r \rangle$, dann ist R ein Normalteiler von G.

(a) Für $\rho \in \mathrm{Irr}(R)$, bestimmen Sie ρ^G.

(b) Sei $\rho \in \mathrm{Irr}(R)$. Beweisen Sie: es gilt $\rho^G \in \mathrm{Irr}(G)$ genau dann, wenn $\rho(r) \neq 1$.

(c) Zeigen Sie, dass es $(n-1)/2$ inäquivalenten irreduziblen induzierten Darstellungen der Form ρ^G, mit $\rho \in \mathrm{Irr}(R)$, gibt.

(d) Schließen Sie, dass jede irreduzible Darstellung von G entweder linear oder äquivalent zu einer induzierten Darstellung von R ist.

Aufgabe 4. Seien $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ **gerade** und $G = D_{2n}$ mit Präsentation:

$$D_{2n} = \left\langle r, s \;\middle|\; r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1} \right\rangle .$$

Setze $R = \langle r \rangle$, dann ist R ein Normalteiler von G.

(a) Für $\rho \in \operatorname{Irr}(R)$, bestimmen Sie ρ^G.

(b) Sei $\rho \in \operatorname{Irr}(R)$. Beweisen Sie: es gilt $\rho^G \in \operatorname{Irr}(G)$ genau dann, wenn $(\rho(r))^2 \neq 1$.

(c) Zeigen Sie, dass es $(n-2)/2$ inäquivalenten irreduziblen induzierten Darstellungen der Form ρ^G, mit $\rho \in \operatorname{Irr}(R)$, gibt.

(d) Schließen Sie, dass jede irreduzible Darstellung von G entweder linear oder äquivalent zu einer induzierten Darstellung von R ist.