Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2

Übungsblatt 12

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **26. Juni 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Zur Erinnerung: Seien p eine Primzahl, G eine endliche p-Gruppe, und N ein Normalteiler von G. Wenn $N \cap Z(G) = \{1\}$ ist, dann gilt $N = \{1\}$.

Aufgabe 1. Seien p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe.

(a) Zeigen Sie: wenn $G/Z(G)$ eine zyklische Gruppe ist, dann ist G abelsch.

(b) Nehmen Sie an, dass $|G| = p^3$ gilt. Beweisen Sie die Folgende.

  (i) Die Gruppe G ist nicht abelsch genau dann, wenn $|Z(G)| = p$ gilt.

  (ii) Die Quotientengruppe $G/Z(G)$ ist abelsch.

Aufgabe 2. Seien p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p^3. Beweisen Sie, dass G wenigstens $p + 2$ inäquivalente lineare Darstellungen hat.

Aufgabe 3. Seien $\chi_1, \ldots, \chi_r$ die irreduzible Charaktere von G über $\mathbb{C}$ und sei χ ein Charakter von G.

(a) Beweisen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} \langle \chi, \chi_i \rangle \chi_i.$$

(b) Zeigen Sie: $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ genau dann, wenn $1 = \langle \chi, \chi \rangle$ gilt.

Hinweis: schreiben $\chi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Zur Erinnerung: In ÜB-11 (3), haben Sie die zwei Charaktere vom Grad 3 von S_4 über $\mathbb{C}$ bestimmt. Der Charakter χ_{ρ_2} der ρ_2 entspricht ist unten angegeben.

	1	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_{ρ_2}	3	1	0	-1	-1

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Charaktertafel von S_4 über $\mathbb{C}$.

Hinweis: Benutzen Sie die Aufgaben aus ÜB-11.