Fakultät für Mathematik | Joshua Maglione
Universität Bielefeld | Sommersemester 2019

Algebra 2
Übungsblatt 11

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **19. Juni 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1. Sei $g \in G$. Beweisen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & \text{falls } g = 1, \\ 0 & \text{falls } g \neq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Seien n eine positive ganze Zahl, V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Der Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathrm{S}_n \to \mathrm{GL}(V)$ der durch

$$\sigma \mapsto \big(v_i \mapsto v_{\sigma(i)}\big)$$

definiert ist heißt die *Permutationsdarstellung* von S_n.

(a) Für $\sigma \in \mathrm{S}_n$, bezeichne

$$\mathrm{Fix}(\sigma) = \{x \in \{1, \dots, n\} : \sigma(x) = x\}$$

die Menge der Fixpunkte von σ in $\{1, \dots, n\}$. Beweisen Sie, dass für jedes $\sigma \in \mathrm{S}_n$ gilt

$$\chi_\rho(\sigma) = |\mathrm{Fix}(\sigma)|.$$

(b) Beantworten Sie: ist ρ treu? Begründen Sie Ihre Antwort.

Zur Erinnerung: Sei n eine positive ganze Zahl und sei $G = \mathrm{S}_n$. Jedes Element $\sigma \in G$ lässt sich schreiben als Produkt von 2-Zykeln, d.h. Elemente der Form $(x\ y)$ mit $x, y \in \{1, \dots, n\}$: zum Beispiel hat man

(1) $1 = (1\ 2)(1\ 2)$;
(2) $(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(1\ 3)$;
(3) $(1\ 2\ 3) = (3\ 1)(3\ 4)(4\ 2)(4\ 3)$.

Die Zerlegung eines Elements $\sigma \in G$ als Produkt von 2-Zykeln ist normalerweise nicht eindeutig bestimmt, jedoch ist es ihre *Parität*: für $\sigma \in G$, bezeichne $M(\sigma)$ die Anzahl der 2-Zykeln in einer Zerlegung von σ, dann ist die Abbildung

$$\mathrm{sgn} : G \to \mathbb{C}^*, \quad \sigma \mapsto (-1)^{M(\sigma)}$$

wohldefiniet. Ein Element $\sigma \in G$ heißt *gerade* falls $M(\sigma)$ gerade ist und sonst *ungerade*.

Aufgabe 3 (Doppelte Aufgabe)**.** Seien $G = \mathrm{S}_4$ und $\rho : G \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ die Permutationsdarstellung von G.

(a) Beweisen Sie, dass zwei irriduzible Darstellungen ρ_1 und ρ_2 von G nach $\mathrm{GL}(V)$ der Graden 1 bzw. 3 existieren derart, dass $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ ist.
(b) Bestimmen Sie der Charakter von ρ_2.
(c) Bestimmen Sie der Charakter von $\mathrm{sgn} \otimes \rho_2$.

(d) Zeigen Sie, dass jede Darstellung ρ_3 die dem Charakter $\mathrm{sgn} \otimes \rho_2$ entspricht, irreduzibel des Grades 3 und zu ρ_2 inäquivalent ist.

Hinweise. (a) Finden Sie $v \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ derart, dass $\mathbb{C}v$ ein $\mathbb{C}G$-Modul ist. Berechnen Sie dann gemeinsame Eigenräume die zu $(1\ 2\ 3)$ und $(1\ 2)(3\ 4)$ assoziiert sind. (b) Es gilt $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$. (c)-(d) Nutzen Sie Eigenschaften von Charaktern.