Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2
Übungsblatt 10

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **12. Juni 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1. Sei V ein $\mathbb{C}G$-Modul mit $\dim_{\mathbb{C}}(V) < \infty$ und sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ die entsprechende Darstellung. Sei $g \in G$ mit $n = |g|$. Beweisen Sie: es gibt eine $\mathbb{C}$-Basis $\mathcal{B}$ von V derart, dass

(i) $\rho_{\mathcal{B}}(g)$ eine diagonale Matrix ist und
(ii) die Einträge auf der Diagonale von $\rho_{\mathcal{B}}(g)$ die Gleichung $x^n - 1 = 0$ erfüllen.

Hinweis: die Gruppe $\langle g \rangle$ ist abelsch.

Aufgabe 2. Seien $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G und $\chi = \chi_\rho$ der Charakter von ρ. Sei $g \in G$.

(a) Nehmen Sie an, dass $n = |g|$ gilt. Zeigen Sie, dass $\chi(g)$ eine Summe von n-ten Einheitswurzeln ist.
(b) Beweisen Sie, dass $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ gilt, wobei $\overline{z}$ die zu $z \in \mathbb{C}$ komplex konjugierte Zahl bezeichnet.
(c) Beweisen Sie, wenn $g \sim_G g^{-1}$, dann gilt $\chi(g) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei $G = \mathbb{Z}/(3)$.

(a) Bestimmen Sie die Charaktertafel von G (über $\mathbb{C}$).
(b) Schreiben Sie den regulären Charakter von G über $\mathbb{C}$ als Linearkombination der irreduzibelen Charaktere.

Aufgabe 4. Seien $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $G = \mathrm{S}_4$, und $V = \mathbb{C}^4$ ein $\mathbb{C}G$-Modul.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl $k(G)$, der konjugiertenklassen von G.
(b) Beweisen Sie, dass V kein einfacher $\mathbb{C}G$-Modul ist.