Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Joshua Maglione
Sommersemester 2019

Algebra 2

Übungsblatt 1

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, **10. April 2019**, im Postfach Ihres Tutors. Jede Aufgabe ist **4 Punkte** wert.

—

Aufgabe 1. Sei $\varphi : M \to M'$ ein R-Modulhomomorphismus. Definieren Sie die Abbildung $\gamma : M/\ker(\varphi) \to \varphi(M)$ durch

$$x + \ker(\varphi) \mapsto \varphi(x).$$

Zeigen Sie, dass γ ein R-Modulisomorphismus ist.

Aufgabe 2. Seien p eine Primzahl und M die abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}/(p))^4$. Entscheiden Sie, für den gegebenen Ring R, ob M ein freier R-Modul ist. Wenn ja, geben Sie eine Basis von M an. Wir definieren

$$\operatorname{diag}(w, x, y, z) = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

(a) $R = \mathbb{Z}/(p)$ mit Skalarmultiplikation,
(b) $R = \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Z}/(p))$ mit Matrix-Multiplikation,
(c) $R = \{\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Z}/(p)) \mid a_i \in \mathbb{Z}/(p)\}$ mit Matrix-Multiplikation,
(d) $R = \{\operatorname{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2) \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Z}/(p)) \mid a_i \in \mathbb{Z}/(p)\}$ mit Matrix-Multiplikation.

Aufgabe 3. Seien $R = \mathbb{Z}^6$ und $M = \mathbb{Z}^2$.
(a) Geben Sie zwei vershiedene R-Modulstrukturen für M an.
(b) Sei $\mathrm{ann}_R(M)$ der R-Untermodul von R der durch

$$\mathrm{ann}_R(M) = \bigcap_{x \in M} \mathrm{ann}_R(x)$$

definiert ist. Gibt es eine R-Modulstruktur auf M derart, dass $\mathrm{ann}_R(M) = 0$?

Aufgabe 4.
(a) Sei $M = \mathbb{Z}/(m) \oplus \mathbb{Z}/(n)$. Geben Sie $m, n > 1$ an derart, dass M frei über $R = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ ist.
(b) Seien K ein Körper und $V = K^n$, für $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass V ein freier $\mathrm{End}_K(V)$-Modul ist genau dann, wenn $n = 1$.